а в другой (штрихованной) системе координат компонентами $a'^1, a'^2, ..., a'^n$, связанными с компонентами в первоначальной системе координат след. образом:

$$a'^i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} a^k.$$

Пусть $T^{pq...t}_{jk...m}$ — одна из набора ф-ций от переменных x^1, ..., x^n (число верх. индексов равно r, а число ниж. индексов равно s). Эти n^{r+s} величин являются компонентами Т. ранга (порядка, валентности) $r+s$ при условии, что его компоненты в др. системе координат, $x'^1, ..., x'^n$, даются след. ф-лой:

$$T'^{pq...t}_{jk...m} = \frac{\partial x'^p}{\partial x^c} \cdots \frac{\partial x'^t}{\partial x^l} \frac{\partial x^d}{\partial x'^j} \cdots \frac{\partial x^g}{\partial x'^m} T^{cb...l}_{df...g} \qquad (1)$$

(все индексы принимают значения от 1 до n). Здесь и далее предполагается, что по встречающимся дважды (один раз внизу и один раз вверху) индексам производится суммирование от 1 до n, причём в производных вида $\partial A/\partial x^k$ индекс k считается нижним. Такой Т. наз. **контравариантным** ранга r и **ковариантным** ранга s. Верх. индексы являются контравариантными индексами, а нижние — ковариантными. Если Т. имеет только контравариантные (верх.) индексы, он наз. контравариантным; если он имеет только ковариантные (ниж.) индексы, он наз. ковариантным. Т., имеющий и контравариантные и ковариантные индексы, наз. смешанным. Из (1) видно, что при переходе от одной системы координат к другой компоненты Т. преобразуются линейно и однородно. Если областью определения описанного выше объекта является только одна точка в каждой системе координат, то его обычно наз. просто Т. Если же его область определения — нек-рая область n-мерного пространства, то его наз. **тензорным полем**. Теория, изучающая тензорные поля, наз. *тензорным анализом*.

Говорить о том, что нек-рая физ. величина является Т. того или иного ранга, можно только, имея в виду определ. *группу* преобразований координат в пространстве, в к-ром эта величина рассматривается. При этом если величину можно считать Т. относительно нек-рой группы преобразований, то она является Т. и относительно любой подгруппы этой группы.

Т. о., Т. ранга 0, т. е. Т., имеющий только одну компоненту с одним и тем же значением во всех координатных системах, является скаляром. Примеры скаляров в физике — масса, темп-ра, заряд, кривизна пространства. Т. ранга 1 является вектором. Примеры векторов в трёхмерном пространстве — скорость, импульс, сила, напряжённости электрич. и магн. полей. Нек-рые Т. ранга 2 также имеют спец. названия в геометрии и в физике: напр., *метрический тензор* в теории римановых пространств и в теории относительности, Т. напряжений (см. *Напряжение механическое*) и Т. *деформаций* в механике сплошной среды, Т. *диэлектрической проницаемости* в электродинамике сплошной среды, *тензор энергии-импульса* в теории относительности, Т. *электромагнитного поля* в электродинамике.

Действия над тензорами. Так как Т. задаются своими компонентами в разл. системах координат, то действия над Т. определяются ф-лами, связывающими в каждой системе координат компоненты результата действия через компоненты Т., над к-рыми производятся действия. Алгебраич. действия над Т. являются обобщением соответствующих действий над векторами и *матрицами*.

а) Сложение и вычитание Т. **Суммой** двух Т. A и B с компонентами $A^{i_1...i_p}_{j_1...j_q}$ и $B^{i_1...i_p}_{j_1...j_q}$, имеющих одно и то же строение, т. е. одно и то же число контравариантных и ковариантных индексов, наз. Т. S с компонентами

$$S^{i_1...i_p}_{j_1...j_q} = A^{i_1...i_p}_{j_1...j_q} + B^{i_1...i_p}_{j_1...j_q}, \qquad (2)$$

а их разностью — Т. D с компонентами

$$D^{i_1...i_p}_{j_1...j_q} = A^{i_1...i_p}_{j_1...j_q} - B^{i_1...i_p}_{j_1...j_q}. \qquad (3)$$

б) Свёртывание смешанного Т. **Свёртыванием** смешанного Т. наз. операция приравнивания одного контравариантного индекса нек-рому ковариантному индексу с последующим суммированием по этому индексу. В результате одного свёртывания ранг Т. уменьшается на два. Если число контравариантных индексов совпадает с числом ковариантных индексов, то при полном свёртывании по всем индексам получается инвариант (скаляр).

в) Умножение Т. Произведением (**внешним произведением**) двух Т. A и B с компонентами $A^{g_1...g_k}_{i_1...i_m}$ и $B^{l_1...l_p}_{j_1...j_q}$ (быть может разл. строения) наз. Т. $C = AB$ с компонентами

$$C^{g_1...g_k l_1...l_p}_{i_1...i_m j_1...j_q} = A^{g_1...g_k}_{i_1...i_m} B^{l_1...l_p}_{j_1...j_q}. \qquad (4)$$

Произведение Т. ассоциативно и дистрибутивно относительно сложения, но, вообще говоря, некоммутативно, т. к. порядок следования индексов в ф-ле (4) является существенным.

Внутренним произведением двух Т. A и B наз. Т., получаемый путём свёртки тензора C [ф-ла (4)] по одному или неск. индексам. В общем случае можно образовать неск. таких внутренних произведений.

Т. наз. **ассоциированным с тензором** $T^{i_1...i_p}_{j_1...j_q}$, если он может быть получен из него подниманием или опусканием нек-рого числа индексов при помощи внутр. произведений вида $g^{i\sigma} T^{i_1...i_p}_{j_1...\sigma...j_q}$ или $g_{j\sigma} T^{i_1...\sigma...i_p}_{j_1...j_q}$, где g_{ij} — **фундаментальный метрический** Т., а $g^{ij} = g^{-1}G^{ij}$ ($g = \det\|g_{ik}\| \neq 0$, $G^{ik} = G^{ki}$ — алгебраич. дополнение g_{ik} в определителе g). Т., ранг к-рого больше единицы, имеет неск. различных ассоциированных Т.

Т., полученные из данного Т. в результате перестановки каких-нибудь верх. (либо ниж.) индексов, наз. **изомерами** данного Т. Множество изомеров Т. A всегда содержит A. Для всякого Т. контравариантного порядка r и ковариантного порядка s можно получить $r!s!$ изомеров, но, вообще говоря, не все эти Т. будут различными. Если множество изомеров Т. содержит единственный Т. A, то A наз. симметричным Т.

При рассмотрении прямоугольных координат можно не различать ковариантные и контравариантные индексы, т. к. в этом случае метрич. Т. g_{ik} имеет наиб. простой вид (единичная матрица).

Признак тензора. Для того чтобы объект X был Т., необходимо и достаточно, чтобы для каждого Т. A нек-рого определённого фиксированного ранга и типа внешнее произведение XA или какое-нибудь внутреннее произведение объекта X и A было Т. определённого фиксированного ранга и типа.

Лит.: Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; Кильчевский Н. А., Элементы тензорного исчисления и его приложения к механике, М., 1954; Схоутен Я.-А., Тензорный анализ для физиков, пер. с англ., М., 1965; Сокольников И., Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред, пер. с англ., М., 1971; Векуа И. Н., Основы тензорного анализа и теории ковариантов, М., 1978.

С. И. Азаков.

ТЕ́НЗОР ИНЕ́РЦИИ — см. в ст. *Момент инерции*.

ТЕ́НЗОР ЭНЕ́РГИИ-И́МПУЛЬСА (ТЭИ) — *тензор* второго ранга, описывающий плотность и поток энергии и импульса полей материи, определяющий взаимодействие этих полей с гравитац. полем. В классич. теории ТЭИ $\theta^{\mu\nu}(x)$ выражается через вариационную производную по метрическому тензору $g_{\mu\nu}(x)$ в точке x пространства-времени от инвариантного относительно замен координат функционала действия S:

$$\theta^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}(x)}, \qquad (1)$$

где $g(x) = \det\|g_{\mu\nu}(x)\|$, $\mu, \nu = 0, 1, ..., D-1$ (D — размерность пространства-времени). Тензор, определяемый по ф-ле (1), очевидно симметричен. В ур-ниях Эйнштейна ТЭИ входит в качестве внеш. источника гравитац. поля: